03-03 Puissances et inverse d'une matrice carrée

Définitions et notations

Pour tout entier p non nul, on définit la **puissance p-ième d'une matrice** carrée A, notée $\mathbf{A}^{p}$, par le produit de p facteurs égaux à A.

Si une matrice carrée A est d'ordre n alors on pose $\mathbf{A}^{0} = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle que soit la matrice M d’ordre n on a $MI_n = I_nM = M$.

Définitions et notation

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice B telle que AB = BA = I_n.

La matrice B est appelée **matrice inverse** de A et se note $\mathbf{A}^{-1}$.

Exemple

Les matrices $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ sont l'inverse l'une de l'autre.

Propriétés

L'égalité AB = I_n est équivalente à BA = I_n.

Pour toute matrice A inversible, la matrice inverse A^{-1} est unique.

Méthode

On considère le système linéaire suivant : $\begin{cases} x+y-z=3 \\ -x+2y+z=0 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$.

Ce système correspond à l'égalité matricielle AX = B avec A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La calculatrice permet d'obtenir $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ or l'égalité AX = B est équivalente à X = A^{-1}B.

On en déduit que $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$.

03-03 Applications du cours

Application 1

Soit $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ avec *a*, *b*, *c* et *d* quatre nombres réels.

1. Écrire les deux systèmes d'équations à deux inconnues équivalents à l'affirmation « B est l'inverse de A ».

2. Déterminer B.

3. **a]** Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier la matrice $M=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ pour être inversible ?

b] En supposant cette condition satisfaite, déterminer M^{-1}.

4. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la matrice est inversible et, si oui, préciser son inverse.

a] $C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

b] $D=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

Application 2

Soit la matrice $E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer E^2 et E^3.

2. Calculer $E^3 - E^2 - 8E$.

3. Montrer que E est inversible et préciser son inverse.

Application 3

À l'aide d'une calculatrice, déterminer l'expression d'un polynôme de degré 3 passant par les points suivants : *A*(-1 ; -4,5), *B*(1 ; 0,5), *C*(2 ; -3) et *D*(5 ; -15).

Application 4

On considère la matrice $F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$. L'usage de la calculatrice est autorisé.

1. Chercher une particularité des puissances de F.

2. Écrire F sous la forme $F = 2G - I_3$ en précisant l'expression de G.

3. Écrire F^2 et F^3 en fonction de G et I_3.

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice F^n peut s'écrire sous la forme $f_nG + (-1)^nI_3$.

Préciser la relation de récurrence permettant d'obtenir le coefficient f_{n+1} à partir de f_n.